Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы

Линейное сопротивление и диссипативная функция. Если на точки системы с одной степенью свободы кроме потенциальных сил действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа выразится в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}, \tag{14}$$

где $Q^{\Pi}=-\partial\Pi/\partial q$ — обобщенная сила потенциальных сил; Q^{Φ} — обобщенная сила сил сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления $\bar R_k$ точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т. е.

$$\bar R_k=-\mu_k\bar v_k=-\mu_k\dot{\bar r}_k,$$

где μ_k — постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы, имеем

434

$$Q^{\Phi}=\sum_{k=1}^{N}\bar R_k\cdot\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\dot{\bar r}_k\cdot\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}. \tag{15}$$

Для дальнейшего преобразования используем тождество Лагранжа, полученное при выводе уравнений Лагранжа [см. формулу (32) § 9 гл. 6]:

$$\partial\bar r_k/\partial q=\partial\dot{\bar r}_k/\partial\dot q.$$

Получим

$$Q^{\Phi}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\dot{\bar r}_k\cdot\frac{\partial\dot{\bar r}_k}{\partial\dot q}\right)=-\frac{\partial}{\partial\dot q}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2}. \tag{15'}$$

Введем обозначение:

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\bar v_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k v_k^2}{2}. \tag{16}$$

Функцию Φ называют *диссипативной функцией* или функцией Рэлея. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Из (15′) для обобщенной силы сопротивления имеем $Q^{\Phi}=-\partial\Phi/\partial\dot q$.

Выразим функцию Φ через q и $\dot q$. Учитывая, что

$$\bar r_k=\bar r_k(q);\quad \dot{\bar r}_k=\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\dot q,$$

имеем

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2}=\frac{\dot q^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\right)^2=\frac{1}{2}B\dot q^2, \tag{16'}$$

где $B=B(q)=\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\right)^2$.

Функция B зависит только от q и не зависит от $\dot q$, так как от $\dot q$ не зависит величина $\partial\bar r_k/\partial q$.

Для выяснения физического смысла диссипативной функции получим энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого умножим на $\dot q$ уравнение Лагранжа (14)

$$\dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}-\dot q\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}\dot q-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}\dot q \tag{17}$$

и выполним ряд преобразований.

Учитывая, что

$$T={}^1/_2\,A(q)\dot q^2,$$

имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q}=A(q)\dot q;\quad \dot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=A(q)\dot q^2=2T. \tag{18}$$

Аналогично,

$$\Phi={}^1/_2\,B(q)\dot q^2;$$

435

следовательно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q;\quad \dot q\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q^2=2\Phi. \tag{19}$$

Потенциальная энергия для случая стационарного потенциального поля зависит от времени только через координату q. Следовательно,

$$\dot q\frac{\partial\Pi}{\partial q}=\frac{d\Pi}{dt}. \tag{20}$$

Преобразуем первое слагаемое в (17), учитывая (18). Имеем

$$\dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}(2T)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}. \tag{21}$$

Подставляя (18)—(21) в (17), получим

$$\frac{d}{dt}(2T)-\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial q}+\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)=-\frac{d\Pi}{dt}-2\Phi. \tag{21'}$$

Учитывая, что T — функция только q и $\dot q$, зависящих от t, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q}\dot q+\frac{\partial T}{\partial\dot q}\ddot q=\frac{dT}{dt}.$$

После переноса — $d\Pi/dt$ в левую часть (21′) и объединения слагаемых получаем

$$\frac{d}{dt}(2T-T+\Pi)=-2\Phi\quad\text{или}\quad\frac{d}{dt}(T+\Pi)=-2\Phi.$$

Если ввести полную механическую энергию $E=T+\Pi$, то окончательно имеем энергетическое соотношение

$$dE/dt=-2\Phi. \tag{22}$$

Это соотношение показывает, *что диссипативная функция Φ характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления.* На убывание полной механической энергии указывает знак минус в (22). Диссипативная функция Φ, согласно (16), является величиной положительной.

Разложим диссипативную функцию в ряд в окрестности положения равновесия системы. Для этого в соответствии с (16′) следует разложить в ряд по степеням q функцию $B(q)$ в окрестности $q=0$. Имеем

$$B(q)=B(0)+\left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\dots.$$

Подставляя это разложение в (16′) и оставляя в нем только $B(0)$, получаем

$$\Phi={}^1/_2\,B(0)\dot q^2={}^1/_2\,\mu\dot q^2, \tag{23}$$

436

где введено обозначение $\mu=B(0)$. Положительная постоянная величина μ называется *обобщенным коэффициентом сопротивления.*

Дифференциальное уравнение малых собственных движений при действии линейного сопротивления. Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции:

$$T=a\dot q^2/2;\quad \Pi=cq^2/2;\quad \Phi=\mu\dot q^2/2.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}=a\ddot q;\quad Q^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}=-cq;\quad Q^{\Phi}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=-\mu\dot q,$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$a\ddot q=-cq-\mu\dot q.$$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все слагаемые второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на a и ввести обозначения $k^2=c/a$, $2n=\mu/a$, то после переноса всех членов уравнения в левую часть получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=0. \tag{24}$$

Постоянная $k=\sqrt{c/a}$ является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина $n=\mu/(2a)$ называется *коэффициентом затухания.* Ее размерность такая же, как и у круговой частоты. Вместо n иногда употребляют величину $\tau_0=1/n$, которая называется постоянной времени затухания и имеет размерность времени.

Интегрирование дифференциального уравнения движения. Дифференциальное уравнение (24) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме $q=e^{\lambda t}$, где постоянная λ определяется из характеристического уравнения $\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$, которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}. \tag{25}$$

Могут представиться три случая: 1) $n<k$ — это случай малого сопротивления; 2) $n>k$ — случай большого сопротивления; 3) $n=k$ — случай критического сопротивления. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

437

Затухающие колебания. Если $n<k$, то величина под знаком квадратного корня в (25) отрицательна. Обозначим k_1^2 положительную величину (k^2-n^2). Тогда $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ и из (25) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm k_1 i.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=0,$$

зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q=e^{-nt}\left(C_1^*e^{ik_1t}+C_2^*e^{-ik_1t}\right)=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t), \tag{26}$$

где C_1^*, C_2^* и C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение (26) можно также представить в другой, амплитудной, форме:

$$q=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha), \tag{27}$$

где A и α — тоже произвольные постоянные.

Раскрывая синус суммы, имеем

$$q=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)=e^{-nt}(A\sin\alpha\cos k_1t+A\cos\alpha\sin k_1t).$$

Сравнивая это уравнение с (26), получаем формулы связи постоянных:

$$C_1=A\sin\alpha;\quad C_2=A\cos\alpha$$

или

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\quad \sin\alpha=C_1/A;\quad \cos\alpha=C_2/A;\quad \operatorname{tg}\alpha=C_1/C_2. \tag{28}$$

Постоянные C_1, C_2 и соответственно A, α определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot q=\dot q_0$.

Дифференцируя (26) по времени, имеем

$$\dot q=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+e^{-nt}(-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t). \tag{29}$$

Используя выражение (26) для q, а (29) — для $\dot q$ при $t=0$, получаем уравнения для определения C_1 и C_2:

$$q_0=C;\quad \dot q_0=-nC_1+k_1C_2.$$

Из них

$$C_1=q_0;\quad C_2=(\dot q_0+nq_0)/k_1=(\dot q_0+nq_0)/\sqrt{k^2-n^2}.$$

Соответственно постоянные A и α через начальные условия выразятся в следующей форме:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{q_0^2+\frac{(\dot q_0+nq_0)^2}{k^2-n^2}};\quad \sin\alpha=\frac{q_0}{A};\quad \cos\alpha=\frac{\dot q_0+nq_0}{A\sqrt{k^2-n^2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{q_0\sqrt{k^2-n^2}}{\dot q_0+nq_0}. \tag{30}$$

438

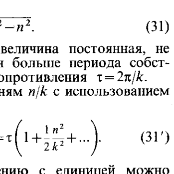

Рис. 114

Величина A положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза α может иметь значения в пределах от 0 до 2π.

Для выяснения изменения функции $q(t)$ построим ее график, используя уравнение (27). Вид графика функции $q=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$ (рис. 114) можно выяснить с помощью построения графиков вспомогательных функций $q_1=Ae^{-nt}$ (кривая *1*) и $q_2=-Ae^{-nt}$ (кривая *2*). Кривые *1* и *2* являются ограничивающими для $\sin(k_1t+\alpha)$, который изменяется между 1 и -1.

Таким образом, изобразив синусоиду между ограничивающими кривыми *1* и *2*, можно составить представление о виде графика функции $q(t)$. На рис. 114 в действительности представлены графики отдельных функций $q(t)$, $+Ae^{-nt}$ и $-Ae^{-nt}$.

Из графика функции $q(t)$ следует, что величины последовательных наибольших отклонений q от положения равновесия уменьшаются с увеличением времени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с этим движение, определяемое уравнением (27) или (26), называют *затухающими колебаниями.*

Условным периодом затухающих колебаний (или *периодом*) называют период $\sin(k_1t+\alpha)$. Он является периодом прохождения системы через положения равновесия, так как функции $q(t)$ и $\sin(k_1t+\alpha)$ равны нулю одновременно. Круговой частотой $\sin(k_1t+\alpha)$ является величина $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$. Следовательно, период затухающих колебаний

$$\tau_1=2\pi/k_1=2\pi/\sqrt{k^2-n^2}. \tag{31}$$

Период затухающих колебаний — величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления $\tau=2\pi/k$.

Из (31), разлагая τ_1 в ряд по степеням n/k с использованием бинома Ньютона, имеем

$$\tau_1=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{2\pi}{k}\left(1-\frac{n^2}{k^2}\right)^{-1/2}=\tau\left(1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2}+\dots\right). \tag{31'}$$

Для очень малых n/k по сравнению с единицей можно считать $\tau_1\approx\tau$, т. е. малое сопротивление не изменяет периода собственных колебаний системы. В более общем случае можно использовать приближенную формулу

$$\tau_1=\tau\left(1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2}\right). \tag{31''}$$

439

В действительности функция $q(t)$ не является периодической, так как не существует величины τ_1, удовлетворяющей условию периодичности $q(t+\tau_1)=q(t)$ для любого момента времени.

Определим моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимальных и минимальных значений. В эти моменты времени $\dot q(t)=0$.

Дифференцируя выражение $q(t)$ из (27) и приравнивая нулю производную, получим следующее уравнение:

$$\dot q=Ae^{-nt}[-n\sin(k_1t+\alpha)+k_1\cos(k_1t+\alpha)]=0.$$

Так как e^{-nt} равно нулю только при $t=\infty$, то соответствующие моменты времени определяются из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках:

$$-n\sin(k_1t+\alpha)+k_1\cos(k_1t+\alpha)=0,$$

или

$$\operatorname{tg}(k_1t+\alpha)=k_1/n.$$

Если t_1 — одно из искомых значений t, удовлетворяющих этому тригонометрическому уравнению, то, учитывая, что период тангенса равен π, все остальные искомые значения времени будут удовлетворять соотношению

$$k_1t+\alpha=(k_1t_1+\alpha)+m\pi$$

или

$$t=t_1+m\frac{\pi}{k_1},$$

где m — любое натуральное число.

Таким образом, моменты времени, в которые функция $q(t)$ достигает максимумов и минимумов, образуют бесконечную последовательность значений

$$t_1,\quad t_2=t_1+\frac{\pi}{k_1},\quad t_3=t_1+2\frac{\pi}{k_1}+\dots.$$

Из графика функции $q(t)$ (см. рис. 114) следует, что между каждыми ее двумя максимумами расположен один минимум, и наоборот. Следовательно, два соседних максимальных значения функции $q(t)$ наступают через промежуток времени, равный $2\pi/k_1$, который совпадает с периодом затухающих колебаний τ_1. Два последовательных минимума тоже разделяет промежуток времени, равный τ_1.

Переменную величину Ae^{-nt} называют *условной амплитудой* затухающих колебаний. Она не является максимальным значением функции $q(t)$. Установим закон изменения условной амплитуды Ae^{-nt} при изменении времени на период τ_1. Если в момент времени t_1 условная амплитуда $A_1=Ae^{-nt_1}$, то через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний τ_1, в момент $t_2=t_1+\tau_1$

$$A_2=Ae^{-nt_1}e^{-n\tau_1}=A_1e^{-n\tau_1}.$$

440

Это справедливо для любых двух моментов времени, отличающихся на период τ_1. Действительно, если при $t_m=t_1+m\tau_1$

$$A_m=Ae^{-nt_1}e^{-mn\tau_1},$$

где m — любое натуральное число, большее единицы, то при $t_{m+1}=t_1+(m+1)\tau_1$

$$A_{m+1}=Ae^{-nt_1}e^{-(m+1)n\tau_1}=A_me^{-n\tau_1}.$$

Таким образом, последовательные значения условных амплитуд в моменты времени, отличающиеся на условный период, образуют убывающую геометрическую прогрессию A_1, $A_1e^{-n\tau_1}$; $A_1e^{-2n\tau_1}$; ...; $A_1e^{-mn\tau_1}$; ... со знаменателем $e^{-n\tau_1}$.

Можно показать, что по такому же закону убывающей геометрической прогрессии изменяются любые последовательные значения функции

$$q=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$$

для моментов времени, отличающихся друг от друга на условный период. Так, если в момент времени t_1

$$q_1=Ae^{-nt_1}\sin(k_1t_1+\alpha),$$

то для момента времени $t_2=t_1+\tau_1$

$$q_2=Ae^{-nt_1}e^{-n\tau_1}\sin(k_1t_1+\alpha)=q_1e^{-n\tau_1},$$

так как $\sin[k_1(t_1+\tau_1)+\alpha]=\sin(k_1t_1+\alpha)$, вследствие того что τ_1 является периодом.

Аналогично, если для $t_m=t_1+m\tau_1$

$$q_m=Ae^{-nt_1}e^{-mn\tau_1}\sin(k_1t_1+\alpha),$$

то для $t_{m+1}=t_1+(m+1)\tau_1$

$$q_{m+1}=Ae^{-nt_1}e^{-(m+1)n\tau_1}\sin(k_1t_1+\alpha)=q_me^{-n\tau_1}.$$

Поэтому последовательные значения $q_1, q_2, \dots, q_m, \dots$ образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-n\tau_1}$.

Так как любые два значения функции $q(t)$, соответствующие моментам времени, отличающимся на период τ_1, связаны соотношением

$$q_{m+1}=q_me^{-n\tau_1},$$

то этому соотношению удовлетворяют и два последовательных значения максимума:

$$q_{m+1}^{\max}=q_m^{\max}e^{-n\tau_1}.$$

Величину отношения двух последовательных максимумов

$$D=q_m^{\max}/q_{m+1}^{\max}=e^{n\tau_1}$$

называют *декрементом колебания.*

Натуральный логарифм декремента колебания называется *логарифмическим декрементом колебания.* Для логарифмического декремента колебания η имеем

441

$$\eta=\ln D=n\tau_1. \tag{32}$$

Кроме декремента и логарифмического декремента колебания часто используется другая характеристика затухания — *добротность системы Q*, которая определяется приближенным соотношением

$$Q=k/(2n), \tag{33}$$

где k — частота собственных колебаний без учета сопротивления; n — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент колебания можно выразить через добротность. Действительно, из (32) и (33) с учетом (31)

$$\eta=\pi\Big/\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}. \tag{34}$$

Таким образом, из проведенного исследования можно заключить, что *малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные значения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.*

Затухающие движения. Рассмотрим случай, когда $n>k$ (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}=-n\pm k_2,$$

где введено новое обозначение для положительной величины $\sqrt{n^2-k^2}=k_2$.

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как $k_2<n$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения $\ddot q+2n\dot q+k^2q=0$ имеет вид

$$q=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}=e^{-nt}(C_1e^{k_2t}+C_2e^{-k_2t}), \tag{35}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям

$$t=0;\quad q=q_0;\quad \dot q=\dot q_0.$$

Не выполняя этих вычислений, можно оценить поведение функции $q(t)$, используя уравнение (35). Для $q_0>0$ могут представиться три случая в зависимости от знака и значения $\dot q_0$ (рис. 115).

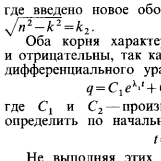

Рис. 115

При $\dot q_0>0$ функция $q(t)$ некоторое время возрастает до определенного максимума, а затем убывает, асимптотически приближаясь к нулю, так как $\lim_{t\to\infty}q(t)=0$ вследствие того, что показатели степеней λ_1 и λ_2 отрицательны (кривая *1*).

442

При не очень больших по абсолютной величине отрицательных значениях $\dot q_0$ может сразу начаться убывание $q(t)$ (кривая *2*). При больших по модулю отрицательных значениях $\dot q_0$ функция $q(t)$, убывая, может достичь нулевого значения, соответствующего положению равновесия системы, стать отрицательной и, оставаясь отрицательной, асимптотически приближаться к нулю (кривая *3*). Во всех этих случаях *движение является затухающим, неколебательным, которое иногда называют также апериодическим.*

При $n=k$ (случай критического сопротивления) характеристическое уравнение имеет кратный отрицательный корень

$$\lambda_1=\lambda_2=-n.$$

Соответственно этому решение дифференциального уравнения $\ddot q+2n\dot q+k^2q=0$ имеет вид

$$q=e^{-nt}(C_1t+C_2). \tag{36}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям. В этом случае при t, стремящемся к бесконечности, $q(t)$ стремится к нулю при любых конечных значениях постоянных C_1 и C_2, так как

$$\lim_{t\to\infty}(e^{-nt}t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{nt}}=0,$$

что проверяется раскрытием неопределенности по правилу Лопиталя.

Таким образом, *случай критического сопротивления тоже дает затухающее движение.*

При $n\geqslant k$ движение не является колебательным и с некоторого момента времени начинается так называемое *лимитационное движение*, при котором система асимптотически стремится вернуться к положению равновесия.

Анализ влияния линейного сопротивления на собственные малые колебания показывает, что линейное сопротивление не может сделать устойчивое положение равновесия неустойчивым. Если в окрестности устойчивого положения равновесия система совершает незатухающие малые колебания, то линейное сопротивление превратит их в затухающие или сделает даже затухающими движениями.

Пример. Система состоит из точечного груза M с силой тяжести $P=200$ Н, прикрепленного к концу невесомого стержня длиной $l=90$ см, другой конец которого закреплен с помощью цилиндрического шарнира O (рис. 116). К стержню в точке B прикреплены две одинаковые пружины, коэффициенты жесткости которых $c=20$ Н/см, а в точке A — демпфер, создающий линейную силу сопротивления; коэффициент сопротивления демпфера $\mu=15$ Н·с/см.

Система расположена в вертикальной плоскости. Статическому положению равновесия системы соответствует вертикальное положение стержня, при котором пружины не деформированы. В начальный момент времени стержень

443

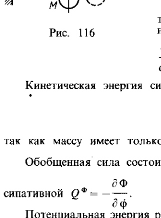

Рис. 116

отклонен от вертикали против часовой стрелки на угол $\varphi_0=6^\circ$ и отпущен без начальной скорости.

Определить движение системы, считая его малым, и усилие в шарнире O в начальный момент движения, если $l_1=40$ см, $l_2=30$ см. Массой пружины и подвижных частей демпфера, а также трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ, отсчитывая его от положения равновесия стержня против часовой стрелки.

Связи системы, состоящие из шарниров без трения, следует считать идеальными. Для движения системы имеем одно уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}=\frac{P}{g}\frac{(l\dot\varphi)^2}{2},$$

так как массу имеет только груз M.

Обобщенная сила состоит из двух сил: потенциальной $Q^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}$ и диссипативной $Q^{\Phi}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot\varphi}$.

Потенциальная энергия равна работе потенциальных сил при перемещении системы из рассматриваемого положения в положение равновесия. Вычислим потенциальную энергию сил $\bar P$ и упругости $\bar F$. Имеем

$$\Pi=P(l-l\cos\varphi)+2c\frac{(\lambda^2-\lambda_0^2)}{2}.$$

Работа силы тяжести положительна, так как точка ее приложения опускается вниз в направлении силы при рассматриваемом перемещении. Если угол считать малым, то удлинение каждой из пружин будет $\lambda=(l_1+l_2)\varphi$. Удлинение следует при этом учитывать только в горизонтальном направлении. Обе силы упругости пружин направлены в одну сторону (одна пружина растянута, другая — сжата), и их работа положительна; $\lambda_0=0$, так как в положении равновесия пружина не деформирована.

Для малых углов φ, отбрасывая малые третьего и более высоких порядков, следует считать $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$. Поэтому

$$\Pi=Pl(1-\cos\varphi)+c(l_1+l_2)^2\varphi^2=[Pl+2c(l_1+l_2)^2]\frac{\varphi^2}{2}.$$

Сила сопротивления демпфера

$$\bar R=-\mu\bar v_A,$$

где $v_A=l_1|\dot\varphi|$ для малых φ и $\dot\varphi$. Диссипативная функция Φ вычисляется, как и кинетическая энергия, только вместо массы следует взять коэффициент сопротивления μ. Следовательно,

$$\Phi=\mu\frac{v_A^2}{2}=\mu l_1^2\dot\varphi^2/2.$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа. Имеем

444

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\dot\varphi;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi;$$

$$Q^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=-[Pl+2c(l_1+l_2)^2]\varphi;$$

$$Q^{\Phi}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot\varphi}=-\mu l_1^2\dot\varphi.$$

Имея эти данные, составляем уравнение малых движений системы:

$$\frac{Pl^2}{g}\ddot\varphi=-[Pl+2c(l_1+l_2)^2]\varphi-\mu l_1^2\dot\varphi,$$

или

$$\ddot\varphi+2n\dot\varphi+k^2\varphi=0,$$

где

$$k^2=\frac{Pl+2c(l_1+l_2)^2}{Pl^2}g=\frac{200\cdot90+2\cdot20\cdot70^2}{200\cdot90^2}980=129{,}45;$$

$$k=11{,}4\ \text{с}^{-1};\quad n=\frac{\mu l_1^2g}{2Pl^2}=\frac{15\cdot40^2\cdot980}{2\cdot200\cdot90^2}=7{,}25\ \text{с}^{-1}.$$

Приближенное дифференциальное уравнение для малых движений системы можно получить также применяя уравнение вращательного движения твердого тела (стержень с грузом) вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O:

$$J_z\ddot\varphi=\sum M_z(\bar F_k^{(e)}).$$

В рассматриваемом примере $n<k$. Следовательно, имеем случай затухающих малых собственных колебаний. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$\varphi=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha),$$

где

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{76{,}89}\approx8{,}7\ \text{с}^{-1}.$$

Дифференцируя φ по времени, получим

$$\dot\varphi=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+e^{-nt}(-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t).$$

При $t=0$ $\varphi=\varphi_0=\frac{\pi}{180}6=\pi/30$, $\dot\varphi=0$. Подставляя эти значения в выражения для φ и $\dot\varphi$, имеем

$$\pi/30=C_1;\quad 0=-nC_1+C_2k_1,$$

или

$$C_1=\pi/30=0{,}105;\quad C_2=nC_1/k_1=7{,}25\cdot0{,}105/8{,}7\approx0{,}09;$$

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=0{,}13;\quad \operatorname{tg}\alpha=C_1/C_2=0{,}105/0{,}09=1{,}2>0.$$

Так как $\sin\alpha=C_1/A>0$, то угол α расположен в первой четверти. По значению тангенса этого угла находим $\alpha=0{,}28\pi$.

Таким образом,

$$\varphi=0{,}13e^{-7{,}25t}\sin(8{,}7t+0{,}28\pi).$$

Для определения реакции шарнира O применим для стержня с грузом следствие из принципа Даламбера, составив условия равновесия приложенных к ним внешних сил вместе с силой инерции груза в проекциях на оси координат.

К стержню и грузу приложены сила тяжести $\bar P$, сила упругости пружин $\bar F$, сила сопротивления $\bar R$, составляющие реакций шарнира $\bar X_0$,

445

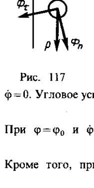

Рис. 117

$\bar Y_0$ и составляющие силы инерции груза $\bar\Phi_n$ и $\bar\Phi_\tau$ (рис. 117), изображенные на рисунке для случая положительных $\ddot\varphi$, φ и $\dot\varphi$.

Сила инерции $\Phi_n=\frac{P}{g}l\dot\varphi^2=0$, так как величинами второго порядка пренебрегли еще при составлении дифференциального уравнения малых колебаний. Если при вычислениях такие величины, как Φ_n, получаются недостаточно малыми по сравнению, например, с силой тяжести и упругости, то допущение, что колебание малое, недостаточно точное.

Сила инерции $\Phi_\tau=\frac{P}{g}l\ddot\varphi$, причем $\ddot\varphi$ следует сюда подставить с полученным знаком для этой величины.

Сила сопротивления $R=\mu v_A=\mu l_1\dot\varphi$.

Сила упругости $F=2c(l_1+l_2)\varphi$.

Составляя уравнения равновесия для сил, имеем

$$X_0-R-F-\Phi_\tau\cos\varphi=0;\quad Y_0-P-\Phi_\tau\sin\varphi=0.$$

Согласно начальным условиям, при $t=0$ $\varphi=\varphi_0=\pi/30$, $\dot\varphi=0$. Угловое ускорение определяем из дифференциального уравнения движения:

$$\ddot\varphi=-k^2\varphi-2n\dot\varphi.$$

При $\varphi=\varphi_0$ и $\dot\varphi=0$,

$$\ddot\varphi=-k^2\varphi_0=-129{,}45\cdot0{,}105=-13{,}6\ \text{с}^{-2}.$$

Кроме того, при $\varphi=\varphi_0$

$$R=0;\quad \cos\varphi=1;\quad \sin\varphi=\varphi_0=\frac{\pi}{30}.$$

Учитывая это, при $\varphi=\varphi_0$ уравнения для X_O и Y_O примут вид

$$X_O-2c(l_1+l_2)\varphi_0-\frac{P}{g}l\ddot\varphi_0=0;\quad Y_O-P=0.$$

Следовательно,

$$X_O=2c(l_1+l_2)\varphi_0+\frac{P}{g}l\ddot\varphi_0=2\cdot20\cdot70\cdot0{,}105+\frac{200\cdot90}{980}(-13{,}6)=44\ \text{Н};\quad Y_O=P=200\ \text{Н}.$$

Реакция шарнира, а следовательно, и числовое значение давления на шарнир

$$N=\sqrt{X_O^2+Y_O^2}\approx205\ \text{Н}.$$